16/10/2019

• **ΑΝΑΓΚΑΙΟΤΗΤΑ**

Εισαγωγή της έννοιας του n-διάστατου τυχαίου διανύσματος (τ.δ) ή τ.μ. X είναι μία τ.μ. $\longrightarrow \underset{\sim}{X}$ είναι ένα τυχαίο διάνυσμα.

Σε πολλά πραγματικά τυχαία φαινόμενα το ενδιαφέρον μας δεν επικεντρώνεται μόνο στη μελέτη ενός χαρακτηριστικού αλλά θέλουμε να μελετήσουμε τη συμπεριφορά (την από κοινού) περισσοτέρων χαρακτηριστικών (τ.μ)

• **ΟΡΙΣΜΟΣ:**

Μια n-διάστατη τ.μ. ή ένα n-διάστατο τυχαίο διάνυσμα του χώρου των n-διαστάσεων είναι μία μονοσήμαντη συνάρτηση με πεδίο ορισμού έναν δειγματικό χώρο S και πεδίο τιμών ένα υποσύνολο του $\mathbb{R}^n$.

Δηλαδή μία n-διάστατη τ.μ. έστω $\underset{\sim}{X}$ αποτελείται από n το πλήθος συνηθισμένες τ.μ. οι οποίες αποτελούν τις συνιστώσες του τυχαίου διανύσματος, δηλαδή

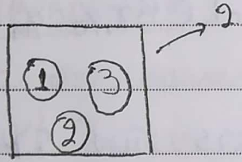
$$\underset{\sim}{X} = \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \\ \vdots \\ X_n \end{pmatrix} = (X_1, X_2, \dots, X_n)^t$$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ

Σε ένα δοχείο έχουν τοποθετηθεί τρία σφαιρίδια αριθμημένα από το 1 έως το 3. Διαλέγουμε 2 σφαιρίδια στην τύχη χωρίς επανάθεση και ορίζω τις τ.μ.

X_1: η τ.μ. που παριστάνει τον αριθμό του 1ου σφαιριδίου

X_2: η τ.μ. που παριστάνει τον μεγαλύτερο από τους 2 αριθμούς.



• οι δυνατές τιμές της X_1: 1,2,3

• οι δυνατές τιμές της X_2: 2,3

Άρα X_1, X_2 διακριτές τ.μ.

Δ.Χ. $S = \{(1,2), (1,3), (2,1), (2,3), (3,1), (3,2)\}$ ισοπίθανα ενδεχόμενα

$$\underset{\sim}{X} = \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \end{pmatrix} = (X_1, X_2)^t$$

Ποιές είναι οι δυνατές τιμές του τ.δ.;

$$R_{X_1 X_2} = \{(1,2), (1,3), (2,2), (2,3), (3,3)\}$$

$$R_{X_1 X_2} \subseteq \mathbb{R}^2$$

· ΟΡΙΣΜΟΣ:

· Αν κάθε συνιστώσα ενός τ. διανύσματος είναι διακριτή τ.μ. τότε το τ. διαν. λέγεται διακριτό τ. διάν.

· Αν κάθε συνιστώσα του τ. διαν. είναι συνεχής τ.μ. τότε το τ. διαν. θα λέγεται συνεχής τ. διάν.

· Υπάρχει και η περίπτωση κάποιες από τις συνιστώσες να είναι διακριτές τ.μ. και άλλες να είναι συνεχής τ.μ. Ένα τέτοιο τ. διαν. λέγεται μεικτό.

· ΔΙΑΚΡΙΤΟ ΤΥΧΑΙΟ ΔΙΑΝΥΣΜΑ

· ΟΡΙΣΜΟΣ:

Έστω S ένας δ.χ. και $X_1, \ldots, X_n$ n το πλήθος διακριτές τ.μ. ορισμένες στον δ.χ. S. Αν $R_{X_1 X_2 \ldots X_n}$ είναι το σύνολο των δυνατών τιμών που μπορεί να λάβει η διατεταγμένη n-άδα $(X_1, \ldots, X_n)$ η συνάρτηση που ορίζεται από τη σχέση:

$$P_{\underline{X}}(x) = P(X_1 = x_1, X_2 = x_2, \ldots, X_n = x_n), \ \forall \ \underline{x} = (x_1, \ldots, x_n) \in R_{X_1 X_2 \ldots X_n}$$

λέγεται από κοινού (joint) συνάρτηση πιθανότητας των τ.μ. $X_1, \ldots X_n$ ή ισοδύναμα του τ. διανύσματος $\underline{X} = (X_1, \ldots X_n)^t$.

· ΣΥΝΕΧΕΙΑ ΤΟΥ ΠΡΟΗΓΟΥΜΕΝΟΥ ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΟΣ

Εύρεση της από κοινού συνάρτησης πιθανότητας του δισδιάστατου τ.δ.

$$R_{X_1 X_2} = \{(1,2), (1,3), (2,2), (2,3), (3,3)\}$$

$$P_{\underline{X}}(1,2) = P_{\underline{X}}(X_1 = 1, X_2 = 2) = \frac{1}{6}$$

$$P_{\underline{X}}(1,3) = P_{\underline{X}}(X_1 = 1, X_2 = 3) = \frac{1}{6}$$

$P_X(2,2) = P(X_1 = 2, X_2 = 2) = \frac{1}{6}$

$P_X(2,3) = P(X_1 = 2, X_2 = 3) = \frac{1}{6}$

$P_X(3,3) = P(X_1 = 3, X_2 = 3) = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$ (γιατί αντιστοιχεί στα σημεία του S.X. (3,1), (3,2))

• Χαρακτηρισμός από κοινού σ.π.

Η από κοινού σ.π. μιας n-διάστατης τ.μ. $(X_1, X_2, \dots, X_n)$ με σύνολο τιμών $R_{X_1X_2\dots X_n}$ ικανοποιεί τις ακόλουθες σχέσεις:

i) $P_X(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0 \quad \forall (x_1, \dots x_n) \notin R_{X_1X_2\dots X_n}$

ii) $P_X(x_1, x_2, \dots, x_n) \geq 0 \quad \forall (x_1, \dots x_n) \in R_{X_1X_2\dots X_n}$

iii) $\sum_{(x_1 \dots x_n) \in R_{X_1 \dots X_n}} P_X(x_1, \dots x_n) = 1$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ

Η από κοινού συνάρτηση πιθανότητας μιας δισδιάστατης τ.μ. (X, Y) δίνεται από τη σχέση: $P(x, y) = c\frac{x}{y}$, $x = 1, 2, 3$
$y = 1, 2, 3$

Ποιο είναι το c;

ΛΥΣΗ

$R_{XY} = \{(1,1), (1,2), (1,3), (2,1), (2,2), (2,3), (3,1), (3,2), (3,3)\}$

Καθώς $P(x,y) \geq 0 \quad \forall (x,y) \in R_{XY}$

$\Rightarrow c \geq 0$

$\sum_{(x,y) \in R_{XY}} P(x,y) = 1 \Rightarrow P(1,1) + P(1,2) + P(1,3) + P(2,1) + P(2,2) + P(2,3) + P(3,1) + P(3,2) + P(3,3) = 1 \Rightarrow$

$\Rightarrow c\frac{1}{1}+c\frac{1}{2}+c\frac{1}{3}+c\frac{2}{1}+c\frac{2}{2}+c\frac{2}{3}+c\frac{3}{1}+c\frac{3}{2}+c\frac{3}{3}=1 \Rightarrow$

$\Rightarrow 3c+c\frac{4}{2}+c\frac{3}{3}+2c+3c=1 \Rightarrow$

$\Rightarrow 8c+2c+c=1 \Rightarrow 11c=1 \Rightarrow c=\frac{1}{11}$

• **ΟΡΙΣΜΟΣ:** Περιθώρια Συνάρτηση Πιθανότητας

Έστω $X=(X_1,\dots,X_n)$ n-διάστατη διακριτή τ.μ.. Η περιθώρια συνάρτηση πιθανότητας της X_i τ.μ. δίνεται από τη σχέση:

$$P(X_i=x_i)=\sum_{\substack{x_1\dots x_{i-1}x_{i+1}\dots x_n \\ \in R_{X_1\dots X_n}}} P(x_1,\dots x_n)$$ (κρατώ σταθερό το x_i και αθροίζω τα υπόλοιπα)

• **ΟΡΙΣΜΟΣ:**

Η από κοινού αθροιστική συνάρτηση κατανομής n-διακριτών τ.μ. $X_1,\dots X_n$ ορίζεται από τη σχέση

$$F(x_1,\dots x_n)=P(X_1\leq x_1,\dots,X_n\leq x_n),\ \forall (x_1,\dots,x_n)\in\mathbb{R}^n$$

• Η Έννοια της Δεσμευμένης κατανομής

Χωρίς βλάβη της γενικότητας θα παρουσιάσουμε στη συνέχεια την έννοια της δεσμευμένης κατανομής για την ειδική περίπτωση που $n=2$.

Έστω λοιπόν $\underset{\sim}{X}=(X_1,X_2)^t$ διδιάστατο τυχαίο διάνυσμα διακριτό. Το ενδιαφέρον επικεντρώνεται στην εύρεση πιθανοτήτων για ενδεχόμενα της μορφής $\{X_1=x_1\}\,|\,\{X_2=x_2\}$.

Υπενθύμιση: $P(A|B)=\frac{P(A\cap B)}{P(B)}$, $P(B)\neq 0$

Ορίζω τη δεσμευμένη τ.μ. $X_1 | X_2 = x_2$ και τη συμβολίζω απλά $X_1 | X_2$

$$P_{X_1|X_2}(x_1|x_2) = \frac{P(X_1, x_2)}{P(X_2 = x_2)}$$

$$P_{X_1|X_2}(x_1, x_2) = \frac{P(x_1, x_2)}{P(X_2 = x_2)} = \frac{P(X_1 = x_1, X_2 = x_2)}{P(X_2 = x_2)} = \frac{\text{από κοινού } (X_1, X_2)}{\text{περιθώρια της } X_2}$$

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ:

Έστω ότι έχουμε 4 διακριτές τ.μ. $(X_1, X_2, X_3, X_4)^t = X$ με από κοινού συνάρτηση πιθανότητας $P_X(x_1, x_2, x_3, x_4)$

1) Ποια η $X_1 | (X_2 = x_2, X_3 = x_3, X_4 = x_4) =$;

$$P_{X_1|X_2X_3X_4}(x_1|x_2x_3x_4) = \frac{P(X_1 = x_1, X_2 = x_2, X_3 = x_3, X_4 = x_4)}{P(X_2, X_3, X_4)} = \frac{P(X_1, X_2, X_3, X_4)}{\sum_{x_1} P(X_1, X_2, X_3, X_4)}$$

2) Την $X_2 | X_3 X_4 =$;

$$P_{X_2|X_3X_4}(x_2|x_3x_4) = \frac{P(X_2, X_3, X_4)}{P(X_3, X_4)} = \frac{\sum_{x_1} P(x_1, x_2, x_3, x_4)}{\sum_{x_1, x_2} P(x_1, x_2, x_3, x_4)}$$

3) $X_1 X_2 X_3 | X_4 =$;

$$P_{X_1X_2X_3|X_4} = \frac{P(X_1, X_2, X_3, X_4)}{P(X_4)} = \frac{P(X_1, X_2, X_3, X_4)}{\sum_{x_1, x_2, x_3} P(X_1, X_2, X_3, X_4)}$$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ

Ένα κατάστημα διαθέτει 2 ταμεία. Έστω τ.μ. που παριστάνει το πλήθος των ατόμων που περιμένουν στο 1^o ταμείο, και Y η τ.μ. που παριστάνει το πλήθος των ατόμων που περιμένουν στο 2^o ταμείο την ίδια χρονική στιγμή. Χρησιμοποιώντας τα δεδομένα των 5 τελευταίων μηνών, παίρνουμε τον ακόλουθο πίνακα πιθανοτήτων.

x \ y	0	1	2
0	0,1	0,04	0,02
1	0,08	0,20	0,06
2	0,06	0,14	0,30

α) Να βρεθούν οι πιθανότητες:

i) Να περιμένει 1 άτομο σε κάθε ταμείο

ii) Το πολύ 1 άτομο σε κάθε ταμείο

iii) ίδιος αριθμός ατόμων σε κάθε ταμείο

iv) Συνολικά 3 άτομα

v) στο 1^o ταμείο 1 άτομο περισσότερο.

β) Να υπολογιστεί η από κοινού Α.Σ.Κ.

γ) Οι περιθώριες κατανομές των X, Y.

δ) Η δεσμευμένη κατανομή της X, δοθέντος ότι το 2^o ταμείο είναι άδειο

ε) Η δεσμευμένη κατανομή της Y δοθέντος ότι στο 1^o ταμείο περιμένει ακριβώς ένα άτομο για να εξυπηρετηθεί.

ΛΥΣΗ

α) $R_{XY} = \{(0,0),(0,1),(0,2),(1,0),(1,1),(1,2),(2,0),(2,1),(2,2)\}$

$P(X=1, Y=1) = 0,2$

$P(X\leq 1, Y\leq 1) = P(0,0)+P(0,1)+P(1,0)+P(1,1) = 0,42$

$P(X=Y) = P(0,0)+P(1,1)+P(2,2) = 0,6$

$P(X+Y=3) = P(1,2)+P(2,1) = 0,2$

$P(X=Y+1) = P(1,0)+P(2,1) = 0,22$

γ) X διακριτή τ.μ με δυνατές τιμές 0,1,2

Περιθώριες της X:

$P(X=0) = \sum_{y\in\{0,1,2\}} P(X=0,y) = P(0,0)+P(0,1)+P(0,2) = 0{,}16$

$P(X=1) = \sum_{y\in\{0,1,2\}} P(X=1,y) = P(1,0)+P(1,1)+P(1,2) = 0{,}34$

$P(X=2) = \sum_{y\in\{0,1,2\}} P(X=2,y) = P(2,0)+P(2,1)+P(2,2) = 0{,}5$

Περιθώριες της Y:

$P(Y=0) = \sum_{x\in\{0,1,2\}} P(x,Y=0) = P(0,0)+P(1,0)+P(2,0) = 0{,}24$

$P(Y=1) = \sum_{x\in\{0,1,2\}} P(x,Y=1) = P(0,1)+P(1,1)+P(2,1) = 0{,}38$

$P(Y=2) = 1-(P(Y=0)+P(Y=1)) = 0{,}38$

δ) $X|Y=0$

$P(X=0|Y=0) = \frac{P(0,0)}{P(Y=0)} = \frac{0{,}1}{0{,}24} = 0{,}4167$

$P(X=1|Y=0) = \frac{P(1,0)}{P(Y=0)} = \frac{0{,}08}{0{,}24} = 0{,}3333$

$P(X=2|Y=0) = \frac{P(2,0)}{P(Y=0)} = \frac{0{,}06}{0{,}24} = 0{,}25$

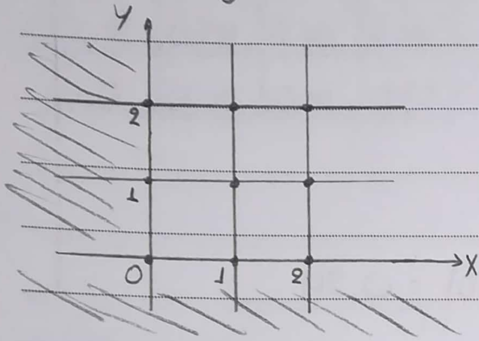
ε) $Y \mid X=1$

$$P(Y=0 \mid X=1) = \frac{P(1,0)}{P(X=1)} = \frac{0,08}{0,34} = 0,2353$$

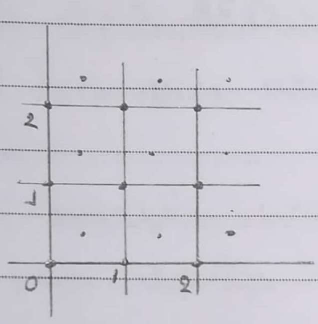
$$P(Y=1 \mid X=1) = \frac{P(1,1)}{P(X=1)} = \frac{0,20}{0,34} = 0,5882$$

$$P(Y=2 \mid X=1) = \frac{P(1,2)}{P(X=1)} = \frac{0,06}{0,34} = 0,1765$$

β) $F_{XY}(x,y) = P(X \le x, Y \le y) \qquad (x,y) \in \mathbb{R}^2$



$F_{XY}(x,y) = 0$ αν $x<0$ ή $y<0$



$F(x,y) = 0,1 = P(0,0)$ αν $0 \le x < 1$, $0 \le y < 1$

$F(x,y) = P(1,0) + P(0,0)$ αν $1 \le x < 2$, $0 \le y < 1$

$F(x,y) = P(1,0) + P(0,0) + P(2,0)$ αν $2 \le x$, $0 \le y < 1$

$F(x,y) = P(0,0) + P(0,1)$ αν $0 \le x < 1$, $1 \le y < 2$

$F(x,y) = P(0,0) + P(0,1) + P(1,0) + P(1,1)$ αν $1 \le x < 2$, $1 \le y < 2$

$F(x,y) = P(0,0) + P(0,1) + P(1,0) + P(1,1) + P(2,0) + P(2,1)$ αν $2 \le x$, $1 \le y < 2$

$F(x,y) = P(0,0) + P(0,1) + P(0,2)$ αν $0 \le x < 1$, $y \ge 2$

$F(x,y) = P(0,0) + P(1,0) + P(0,1) + P(1,1) + P(0,2) + P(1,2)$ αν $1 \le x < 2$, $2 \le y$

$F(x,y) =$ όλες $= 1$ αν $2 \le x$, $2 \le y$